Lille. Résumé.

28 octobre 2024

Une nouvelle théorie spectrale dans le cadre analytique complexe. Application à l'équation prolate sphéroidale et à ses relations avec les zéros de zeta

Jean-Pierre Ramis,

Travail en commun avec Françoise Richard-Jung et Jean Thomann.

En 2021 Alain Connes et Henri Moscovici ont découvert un nouveau spectre pour l'opérateur prolate sphéroidal d'ordre zéro :

$$W_\lambda = -\frac{d}{dx}\left((\Lambda - x^2)\frac{d}{dx}\right) + (2\pi\Lambda x)^2;$$

Λ est un paramètre réel.

CM ont comparé la fonction de comptage des valeurs propres et les estimations de von Mangoldt pour les zéros de zeta et découvert que pour $\Lambda = \sqrt{2}$, le spectre prolate "matches the zeros of zeta" (les carrés des parties imaginaires des zéros non triviaux).

Dans l'exposé nous présenterons quelques uns de nos résultats sur le nouveau spectre CM dont nous avons fait une étude assez exhaustive.

L'approche de CM est basée sur des techniques Hilbertiennes (Sturm Liouville singulier). la notre est complètement différente, elle est basée sur des techniques analytiques complexes : structure des singularités, resommation de séries divergentes, prolongement analytique.

Nous rappellerons brièvement le travail de CM et ses relations avec la théorie du signal.

Nous décrirons ensuite l'un de nos outils essentiels, une "nouvelle" théorie spectrale pour les opérateurs différentiels du second ordre à coefficients polynômiaux basée sur l'analyse complexe. L'idée apparait en fait dans l'article fondateur d'E. Schrödinger sur l'atome d'hydrogène, puis plus tard dans divers travaux de physiciens (molécule d'hélium ionisée, "musique" des trous noirs : Quasi-Normal-Modes).

Nous appliquerons cette théorie au spectre CM pour prolate et en déduirons, entre autres, un calcul efficace du spectre par "matching analytique" et une déformation analytique du spectre (Λ complexe).

Nous travaillons avec une variante de W_Λ, celle qui apparait historiquement dans l'étude du problème de Helmoltz sur un sphéroïde :

$$\mathcal{D}_\tau := -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \tau^2 x^2.$$

Les fonctions propres classiques "naives" sont les solutions de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ *bornées* sur $]-1,1[$. Ceci s'étend à τ complexe, cf. Meixner et Schäfke, MS.

Notre nouvelle théorie spectrale et le fait que les fonctions propres CM pour les valeurs propres négatives (non classiques) sont dans l'espace de Sonin, conduit à étudier le spectre naif de $\mathcal{D}_\tau$ sur l'axe imaginaire pur, c'est à dire à chercher les cas où la solution de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ est *bornée* sur $\mathbb{R}i$. Nous avons montré, en utilisant la transformation de Fourier, que ce spectre coincide avec le spectre CM non trivial. Les nouvelles fonctions propres décroissent exponentiellement en $\pm i\infty$ et leurs valeurs au bord sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions propres CR.

Ceci permet, entre autres de montrer que les nouvelles valeurs propres CM sont *négatives* (conjecturé par CM) et de les calculer rapidement et très élémentairement avec une très grande précision. Je montrerai quelques exemples.

Il est bien connu que pour τ grand, le spectre prolate classique est approximé en un certain sens par le spectre classique de l'opérateur d'Hermite $\{2n+1\}_{n\in\mathbb{N}}$ et que les fonctions d'Hermite h_n "match", à scaling près, les fonctions prolate sur $]-1,1[$. Nous avons vérifié expérimentalement que le spectre prolate CM non classique est approximé en un certain sens par le spectre négatif de l'opérateur d'Hermite $\{2n+1\}_{n\in-\mathbb{N}^*}$ et que les "fonctions d'Hermite" $h_{-n}(x) = h_n(ix)$ "match", à scaling près, nos nouvelles fonctions propres prolate sur $\mathbb{R}i$. Je montrerai quelques résultats.

Quand τ varie dans $\mathbb{C}$, on peut déformer analytiquement le spectre prolate classique, cf. MS. Quand $\log\tau$ varie dans un revêtement universel de $\mathbb{C}^*$, on peut déformer analytiquement le spectre prolate CM non classique. Par comparaison avec la description de Bender-Wu pour l'oscillateur quartique, on peut conjecturer que, modulo prolongement analytique (en évitant des singularités), il n'y a que deux valeurs propres prolate classiques, paire resp. impaire, et que deux valeurs propres prolate CM non classiques, paire resp. impaire. Suivant Malgrange, ceci peut se voir comme l'action d'un "groupe de Galois".

Je terminerai par une conclusion assez "onirique", en comparant au monde à un seul électron de Wheeler et aux zéros non triviaux de zeta :

– il n'y a qu'une valeur propre CM négative paire ;
– il n'y a qu'un électron ;
– il n'y a qu'un zéro non trivial de zeta.

C'est bien sûr hautement conjectural.