



Ecole Doctorale 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2022

Titre : Le modèle des permutations aléatoires spatiales avec interaction bosonique

Directrice de thèse : Mylène Maïda

E-mail : mylene.maida@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse : David Dereudre

E-mail : david.dereudre@univ-lille.fr

Laboratoire : Painlevé UMR 8524

Equipe : Probabilités et statistiques

Descriptif :

L'étude d'une permutation aléatoire choisie uniformément dans l'ensemble \mathfrak{S}_N de toutes les permutations de $\{1, \dots, N\}$ est un sujet classique en théorie des probabilités. On peut s'intéresser par exemple à sa structure en cycles [1], à sa plus longue sous-suite croissante [3] etc. D'autres mesures de probabilités sur les permutations ont été étudiées comme la mesure d'Ewens, avec des motivations de génétique, ou encore les mesures de Mallows, avec des poids qui dépendent de la structure algébrique de la permutation.

On se propose ici d'étudier un modèle spatial issu de la physique quantique pour représenter un gaz de bosons. Dans le cas sans interaction (gaz de bosons libre), le modèle est assez simple : si on se fixe N points x_1, \dots, x_N dans \mathcal{R}^d , on peut définir une mesure Gaussienne sur l'ensemble \mathfrak{S}_N des permutations, pour laquelle chaque permutation π a une probabilité proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^N |x_i - x_{\pi(i)}|^2\right).$$

On peut également rajouter de l'aléa sur les points x_1, \dots, x_N d'abord en volume fini, puis en volume infini. Dans l'article [5] les auteurs construisent proprement le modèle, y compris en volume infini et étudient l'existence de très grands cycles, mettant en évidence une transition de phase en fonction des paramètres du modèle. Ce modèle sera étudié en détail en début de thèse et sera la porte d'entrée pour le modèle avec interaction. L'interaction entre les particules provient d'un hamiltonien qui se calcule via des intégrales d'une interaction par paires le long de ponts browniens entre les particules. La complexité de cette hamiltonien vient d'une représentation de Feynman Kac d'un hamiltonien quantique en une version classique. Voir l'article [4] pour les détails. L'étude de ce modèle sera le coeur de la thèse. Nous chercherons à montrer des équations DLR dans l'esprit de [2] et, dans la continuité de [5], un résultat de transition de phase montrant l'émergence de cycles infinis pour un certain jeu de paramètres.



References

- [1] R. Arratia, A. Barbour, S. Tavaré, *Logarithmic Combinatorial Structure : A probabilistic approach*, European Mathematical Society, 2003
- [2] I. Armendáriz, P. A. Ferrari, S. Yuhjtman, *Gaussian random permutation and the boson point process*, arXiv:1906.11120
- [3] J. Baik, Deift, K. Johansson, *On the Distribution of the Length of the Longest Increasing Subsequence of Random Permutations*, Journal of the American Mathematical Society, 1999
- [4] J. Ginibre, *Some applications of functional integration in statistical mechanics*, Ecole d'Eté de Physique Théorique, Les Houches, France, 1970,
- [5] V. Betz, D. Ueltschi, *Spatial random permutations and infinite cycles*, Communications in mathematical Physics, 2009