

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2026

Titre : Topologie des surfaces algébriques réelles

Directeur de thèse : Arthur Renaudineau

E-mail : arthur.renaudineau@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse :

E-mail :

Laboratoire : Paul Painlevé

Equipe : Géométrie-Topologie

Descriptif :

La topologie des surfaces algébriques réelles demeure un domaine largement ouvert des mathématiques contemporaines. De nombreuses questions fondamentales restent sans réponse, parmi lesquelles la détermination du nombre maximal de composantes connexes — ou encore du nombre maximal d'anses — d'une surface quintique lisse dans l'espace projectif réel.

Dans le cas des courbes algébriques réelles, une approche particulièrement fructueuse consiste à étudier la complexification de la courbe réelle, ainsi que le quotient de cette complexification par l'action de la conjugaison complexe. Cette démarche permet de relier la topologie réelle de la courbe à celle d'une surface réelle obtenue comme quotient, et conduit notamment à des contraintes topologiques profondes, telles que la formule d'orientation complexe de Rokhlin.

Pour les surfaces algébriques réelles, cette approche reste en revanche très peu explorée. Dans ce cadre, le quotient de la complexification par la conjugaison complexe est une variété réelle de dimension 4, et l'application quotient définit un revêtement double ramifié le long de la surface réelle. L'objectif principal de cette thèse est d'étudier certaines propriétés topologiques et géométriques de cette variété de dimension 4, et de comprendre si elles peuvent conduire à de nouvelles restrictions sur la topologie des surfaces algébriques réelles.

Par ailleurs, l'une des méthodes les plus puissantes pour construire des variétés algébriques réelles est la méthode du patchwork de Viro, qui admet notamment une formulation combinatoire. Dans le cas des courbes algébriques réelles, cette version combinatoire permet de contrôler explicitement l'action de la conjugaison réelle et le comportement du quotient, et de démontrer en particulier une version combinatoire de la formule d'orientation complexe de Rokhlin.

Une des directions possibles de la thèse consiste à généraliser ces résultats au cadre des surfaces algébriques réelles obtenues par patchwork combinatoire, et à en déduire de nouvelles contraintes sur leur topologie.