

# Ecole Graduée 631 MADIS

## Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2026

**Titre : Groupes quantiques dynamiques et représentations pré-fondamentales**

**Directeur de thèse :** Huafeng ZHANG

**E-mail :** huafeng.zhang@univ-lille.fr

**Co-directeur de thèse :**

**E-mail :**

**Laboratoire :** Laboratoire Paul Painlevé

**Equipe :** Géométrie et Topologie

### Descriptif :

Fixons une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie et considérons sa catégorie des représentations de dimension finie. Un résultat classique de Cartan-Weyl affirme que cette catégorie est semi-simple et que ses objets simples sont paramétrés par les « poids dominants entiers ». Les poids fondamentaux définissent les représentations fondamentales. Ces représentations forment une famille génératrice de la catégorie au sens suivant : toute représentation simple de dimension finie peut être réalisée comme une sous-représentation d'un produit tensoriel de représentations fondamentales.

Parmi les nombreuses généralisations de la théorie des algèbres de Lie simples complexes de dimension finie, deux familles d'algèbres ont une importance particulière en raison de leur élégance et de la variété des applications qui en déroulent : les algèbres de Kac-Moody (analogues de dimension infinie), les groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo (déformations de l'algèbre enveloppante). On s'intéresse en particulier aux groupes quantiques associés aux algèbres de Kac-Moody de type affine. Ces algèbres ont une théorie des représentations très riches, interagissant notamment avec la géométrie (symplectique/énumérative), la topologie (homologie et K-théorie de variétés carquois), la combinatoire (bases cristallines, algèbres amassées) et la physique mathématique (systèmes intégrables, branches de Coulomb/Higgs).

La catégorie des représentations de dimension finie d'un groupe quantique affine a été intensivement étudiée ces 40 dernières années. En 1991 Chari-Pressley [1] ont classifié les objets simples de cette catégorie dans l'esprit de Cartan-Weyl par les fractions soumises à une condition de zéro/pôle. Cette classification donne lieu naturellement à la notion de représentations fondamentales qui vérifient la propriété de famille génératrice. Une grande partie de cette théorie se généralise aux *groupes quantiques elliptiques* grâce aux travaux de Felder-Varchenko, Konno, Gautam-Toledano Laredo, Aganagic-Okounov... Ici, un groupe quantique elliptique est formellement un groupe quantique affine avec le coproduit tordu par une solution elliptique de l'équation de 2-cocycle dynamique. En passant par une certaine limite, les groupes quantiques elliptiques tendent vers les groupes quantiques affines.

En 2012 Hernandez-Jimbo [2] ont initié l'étude de la catégorie O de représentations de dimension infinie d'un groupe quantique affine (plus précisément, de ses sous-algèbres de Borel). Ils ont paramétré les objets simples par les fractions sans aucune condition de zéro/pôle. De plus, ils ont construit les « représentations pré-

fondamentales » qui correspondent aux polynômes. Ces représentations forment également une famille génératrice dans la catégorie  $\mathcal{O}$ . Elles jouent un rôle crucial dans les travaux de Frenkel-Hernandez sur les spectres de systèmes intégrables quantiques. Elles réapparaissent ensuite dans les travaux de Kamnitzer-Webster-Weekes-Yacobi sur les tranches des grassmanniennes affines, de Braverman-Finkelberg-Nakajima sur les branches de Coulomb, de Varagnolo-Vasserot sur la K-théorie critique de variétés carquois, de Negut sur les algèbres de battage, et de Cao-Okounkov-Zhou-Zhou sur les enveloppes stables critiques.

En vue des diverses interactions avec les autres domaines de mathématiques et physique mathématique, c'est une question importante de construire les représentations pré-fondamentales pour les groupes quantiques elliptiques. Dans un travail en commun avec Felder [3], nous avons défini une catégorie  $\mathcal{O}$  des représentations de dimension infinie pour les groupes quantiques elliptiques de type A. Ses objets simples sont paramétrés par des fractions de fonctions thêta soumises à nouveau à une condition additionnelle. Pour soulever cette condition indésirable, dans ce projet de thèse nous proposons d'étudier une version dégénérée des groupes quantiques elliptiques, les *groupes quantiques dynamiques* [4]. Ce sont les groupes quantiques affines avec le coproduit tordu par une solution rationnelle de l'équation de 2-cocycle dynamique, et ils sont intermédiaires entre les cas affine et elliptique. Une des premières questions serait de bien définir la catégorie  $\mathcal{O}$  des représentations et de classifier ses objets simples par des fractions.

## Références :

- [1] V. Chari et A. Pressley, *Quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. 142 (1991) : 261-283.
- [2] D. Hernandez et M. Jimbo, *Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions*, Compos. Math. 148 (2012) : 1593-1623.
- [3] G. Felder et H. Zhang, *Baxter operators and asymptotic representations*, Selecta Math. New Ser. 23 (2017) : 2947-2975.
- [4] P. Etingof et A. Varchenko, *Exchange dynamical quantum groups*, Commun. Math. Phys. 205 (1999) : 19-52.