



Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2023

Titre : Existence de sous-espace invariants pour certaines classes de perturbations d'opérateurs normaux

Directeur de thèse : Sophie Grivaux

E-mail : sophie.grivaux@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse :

E-mail :

Laboratoire : Laboratoire Paul Painlevé (UMR 8524)

Equipe : Analyse

Descriptif : Étant donné un espace de Banach séparable de dimension infinie X et un opérateur linéaire borné T sur X , un sous-espace vectoriel fermé M de X est dit invariant par T si $T(M)$ est contenu dans M , et non-trivial s'il est distinct de $\{0\}$ et X . Le Problème du Sous-espace Invariant est un célèbre problème de théorie des opérateurs qui s'énonce ainsi : est-il vrai que tout opérateur borné T sur X admet un sous-espace invariant non-trivial ? Ce problème a été résolu par P. Enflo dans les années 70, par la négative [E]: il existe un espace de Banach X supportant un opérateur T sans sous-espace invariant non-trivial. D'autres contre-exemples au Problème du Sous-espace Invariant ont par la suite été obtenus par C. Read sur des espaces classiques, comme les espaces l_1 et c_0 de suites [R1], [R2], et il a été montré dans [GR] que des contre-exemples au Problème du Sous-espace Invariant peuvent être construits sur une large classe d'espaces non-réflexifs. S. Argyros et R. Haydon ont d'autre part montré en 2011 l'existence d'espaces de Banach X sur lesquels tout opérateur possédait un sous-espace invariant non-trivial [AH]. Bien que de nombreux résultats aient été obtenus permettant de montrer l'existence de sous-espaces invariants pour des classes d'opérateurs particulières (opérateurs commutant avec un opérateur compact, opérateurs ayant certaines propriétés spectrales, ou liées au calcul fonctionnel, etc., voir par exemple l'ouvrage [CP]), ce problème reste ouvert dans le cadre des espaces réflexifs, tels les espaces de suites l_p pour $1 < p < +\infty$, et en particulier dans le cadre Hilbertien.



Le but de ce sujet de thèse sera d'étudier la question de l'existence d'un sous-espace invariant pour une classe particulière d'opérateurs sur l'espace de Hilbert l_2 , donnée par certaines perturbations de rang fini d'opérateurs normaux, et notamment de généraliser certains des résultats obtenus dans l'article [GGD].

[AH] S. Argyros, R. Haydon, A hereditarily indecomposable \mathcal{L}^∞ -space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Math.* **206** (2011), 1–54.

[CP] I. Chalendar and J. R. Partington, Modern approaches to the invariant subspace problem (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).

[E] P. Enflo, On the invariant subspace problem for Banach spaces, *Acta Math.* **158** (1987), 213–313.

[GGD] E. Gallardo-Gutierrez, J. Gonzalez-Dona, Finite rank perturbations of normal operators: spectral subspaces and Borel series, *J. Math. Pures Appl.* **192** (2022), 23–75.

[GR] S. Grivaux, M. Roginskaya, A general approach to Read's type constructions of operators without non-trivial invariant closed subspaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* **109** (2014), 596–652.

[R1] C. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space l_1 , *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), 305–317.

[R2] C. Read, The invariant subspace problem on some Banach spaces with separable dual, *Proc. London Math. Soc.* **58** (1989), 583–607.