Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2025

Titre : Persistance de chaînes markoviennes et non-markoviennes

Directeur de thèse : Thomas Simon
E-mail : thomas.simon@univ-lille.fr

Laboratoire : Laboratoire Paul Painlevé UMR 8524

Equipe : Probabilités et Statistique

Descriptif : Soit {Z_n, n ≥ 1} une chaîne aléatoire à valeurs réelles. La probabilité de persistance associée est la suite p_n = P[Z_1 >0, … , Z_n > 0], n ≥ 1, dont la connaissance correspond à celle de la loi du premier temps de passage de {Z_n} au dessous de zéro. Le calcul exact de p_n est rare et on cherche le plus souvent à connaître son comportement asymptotique précis quand n → ∞. Ce comportement asymptotique donne une information sur la structure de la chaîne qui est considérée par les physiciens comme plus intrinsèque que la structure de corrélation, voir (Bray, Majumdar & Schehr, 2013).

L'objectif de la thèse est d'étudier les quantités p_n dans divers contextes. Le premier est celui des chaînes auto-régressives d'ordre 1 :

Y_1 = x > 0 et Y_n = θY_{n-1} + X_n pour n ≥ 1,

où θ est un paramètre réel et {X_n} est une suite i.i.d. appelée la suite des innovations. Il est connu depuis (Hinrichs, Kolb & Wachtel, 2020) que

p_n ~ V(x) e^{- λ n}, n → ∞

avec V(x) > 0 et λ > 0 indépendante de x. Des calculs non-asymptotiques sont également possibles pour innovations uniformes (Alsmeyer, Bostan, Raschel & Simon, 2023) ou exponentielles (Larralde, 2004), en liaison avec la fonction exponentielle déformée (Wang & Zhang, 2018) :

E(θ, z) = ∑ θ^{n(n-1)/2} z^n/n!

où θ in [-1,1] et z in C. On cherchera à exploiter cette connexion avec la persistance pour mieux comprendre diverses conjectures combinatoires sur E(θ, z) posées dans (Sokal, 2009).

Le deuxième contexte est celui des chaînes auto-régressives d'ordre supérieur, qui ne sont plus markoviennes et où p_n est moins bien compris même si l'on sait que son comportement asymptotique reste exponentiel - voir (Aurzada & Simon, 2015). On cherchera des connexions combinatoires classiques dans le cas d'innovations explicites comme dans le cas d'ordre 1. Le cas d'ordre 2 et des innovations exponentielles sera étudié en détail.

Le troisième contexte est celui de chaînes ayant une interaction avec tout leur passé, en particulier le cas des marches aléatoires intégrées. Le comportement asymptotique est alors radicalement différent et donne une vitesse polynomiale. On s'attend à

$$p_n = n^{-\theta + o(1)}$$

où $\theta > 0$ s'appelle un exposant de persistance. Le cas des marches aléatoires intégrées ayant un deuxième moment est bien compris avec $\theta = 1/4$, depuis les travaux de Sinai - voir (Aurzada & Simon, 2015), et on s'attachera dans cette thèse au cas des marches aléatoires intégrées sans deuxième moment, où l'exposant est seulement compris à la limite d'échelle (intégrale de processus de Lévy stables). On regardera aussi le cas d'autres marches aléatoires interagissantes avec leur passé et en particulier certains calculs récents, mais non rigoureux, de (Brémont, Régnier, Voituriez & Bénichou, 2024) sur la marche aléatoire auto-interactive.