



Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2025

Titre : Propriétés fines des densités de temps d'atteinte ou de sortie pour les processus stables

Directeur de thèse : Thomas Simon

E-mail : thomas.simon@univ-lille.fr

Laboratoire : Laboratoire Paul Painlevé UMR 8524

Equipe : Probabilités et Statistique

Descriptif : Les processus de Lévy α -stables ont été très étudiés dans les années 1950-1960, et ont connu un regain d'activité depuis une dizaine d'années, dont un premier bilan a été donné dans une monographie récente de A. E. Kyprianou et J.-C. Pardo (Cambridge University Press, 2022). Parmi les quantités étudiées pour ces processus figurent les temps d'arrivée dans des sous-ensembles de l'espace d'état, qui dans le cas réel sont classiquement les points (temps d'atteinte) et les intervalles semi-finis (temps de sortie). Dans le cas limite du mouvement brownien réel, ces deux quantités classiques coïncident et ont une loi explicite, la loi de Lévy qui possède plusieurs propriétés fines : infinie divisibilité, unimodalité, propriété «bell-shape», entre autres.

Le cas non brownien n'est pas encore bien compris et la présente thèse propose d'étudier les propriétés fines des densités des temps d'atteinte ou de sortie. En particulier, il est connu que les temps d'atteinte sont unimodaux et on cherchera à montrer cette propriété dans le cas, plus difficile, des temps de sortie. Il est conjecturé que les temps de sortie sont infiniment divisibles si et seulement si $\alpha > 1$ et que les temps d'atteinte le sont toujours et on abordera ces deux problèmes ouverts. On étudiera aussi les changements de signe des dérivées successives de telles densités, par analogie avec la propriété «bell-shape» récemment établie pour les lois stables réelles (Kwasnicki, 2020). Les temps d'arrivée dans les intervalles finis et le cas multidimensionnel isotrope, dans l'esprit des travaux récents de l'école polonaise, pourront enfin également être abordés.

Les outils pour étudier ce type de problème mélangent l'analyse classique (positivité complète, convexité, fonctions spéciales) et les probabilités (processus de Lévy et leurs fonctionnelles exponentielles, martingales). Ils demandent une certaine période d'assimilation, dont la durée reste raisonnable et le vif du sujet pourra être abordé rapidement.