Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2023

Titre : Ergodicité quantique unique pour les formes modulaires de Hilbert

Directeur de thèse : Nicole Raulf
E-mail : nicole.raulf@univ-lille.fr

Co-encadrant de thèse : Didier Lesesvre
E-mail : didier.lesesvre@univ-lille.fr

Laboratoire : Laboratoire Paul Painlevé

Equipe : AGA

Descriptif :

Il s'agit d'un sujet de thèse en mathématiques fondamentales, plus précisément en théorie des formes automorphes. Les formes automorphes sont des objets connectés à de nombreux domaines tant des mathématiques que de la physique. Notamment la conjecture d'unique ergodicité quantique a son origine dans la physique quantique. Une particule est décrite dans ce cadre par une fonction d'onde ψ dont le comportement est régi par l'équation de Schrödinger $H\psi = i\hbar\psi$ où H est l'opérateur Hamiltonien. Les fonctions propres $\psi(x,t)$ de l'opérateur de Hamilton donnent naissance à une mesure $|\psi(x,t)|^2 dV$ quantifiant la probabilité de trouver une particule au temps t et en position x dans le volume dV. On peut poser la question : que se passe-t-il lorsque $\hbar$ tend vers zéro. Dans le cadre des variétés riemanniennes générales, typiquement la surface modulaire, où l'opérateur central est le laplacien, cela revient à considérer une suite de fonctions propres normalisées correspondant à des valeurs propres croissant vers l'infini. Des arguments physiques suggèrent que les mesures de probabilité associées deviennent équiréparties : c'est la fameuse conjecture de l'ergodicité quantique unique (QUE) de Rudnick et Sarnak.

Dans le cadre des variétés compactes et lorsque le flot géodésique sur le fibré tangent unitaire est ergodique, il existe une sous-suite de densité un telle que cette équirépartition est vérifiée : il s'agit du premier résultat, fondamental, appelé *ergodicité quantique* et dû à Shnirelman, C. de Verdière et Zelditch. Zelditch a prouvé un résultat similaire dans le cas des surfaces hyperboliques de volumes finis (autrement dit, dans le cas des groupes fuchsiens qui sont des réseaux). Luo et Sarnak, par ces méthodes, ont réussi à obtenir QUE en moyenne.

Lindenstrauss en 2006 prouve le théorème d'ergodicité quantique *unique*, et non plus seulement pour une sous-suite des valeurs propres, dans le cas d'une surface arithmétique compacte de type arithmétique, soulevant la possibilité d'une perte de masse dans le cas de surfaces de volume fini, possibilité effacée par Soundararajan en 2010. Dès lors, des résultats plus fins ont été obtenus, notamment dans le cas d’ensembles maigres et de boules diminuant de taille, donnant des versions qui quantifiant la convergence. Dans ce cas on se base également sur des heuristiques physiques qui indiquent que l’on ne peut pas s'attendre à une équirépartition en dessous de l'échelle de Planck (également appelée longueur d'onde de De Broglie) car dans cette région les phénomènes quantiques disparaissent et les fonctions propres de Laplace se comportent comme des fonctions régulières.

Ces résultats, pour les formes holomorphes (Holowinsky) ou de Maaß classiques, i.e. dans le cas de la surface modulaire, représentent une structure analytique des représentations automorphes sous-jacentes. Ces résultats correspondent, dans le cadre très général des représentations automorphes, au cas très particulier du groupe GL(2) sur le corps Q des rationnels. Il devient alors naturel de se demander ce qu’il en est dans le cas de corps de nombres plus généraux, ou de groupes plus généraux, directions dans lesquelles peu de résultats existent et demeurent très partiels. Cela revient à étudier la conjecture QUE pour les formes modulaires de Hilbert, analogue des formes modulaires dans le cas de réseaux associé aux unités d’un corps de nombre quadratique réel, agissant sur autant de copies du plan hyperbolique H par le biais de ses différents plongements. On s’intéresserait avant tout au problème d’équirépartition à petite échelle, première étape déjà précise dans théorie de l’ergodicité quantique arithmétique.