Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2025

Titre : Quotients sous les actions des groupes cristallographiques complexes

Directeur de thèse : Dimitri Markouchevitch
E-mail : dimitri.markouchevitch@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse :
E-mail :

Laboratoire : Painlevé

Equipe : AGA

Descriptif : Un groupe cristallographique complexe (CC) Γ est un groupe discret de transformations affines de l'espace complexe $\mathbf{C}^n$ ayant un domaine fondamental borné. Tout groupe CC est une extension d'un réseau Λ de $\mathbf{C}^n$ par un groupe fini linéaire G :

$$0 \to \Lambda \to \Gamma \to G \to 1.$$

Le réseau Λ opère sur $\mathbf{C}^n$ par translations, et G=dΓ est le groupe des parties linéaires des transformations de Γ. Le cas où Γ est engendré par des réflexions complexes est particulièrement intéressant ; on appellera de tels Γ groupes CCR. Précisons qu'on définit une réflexion complexe comme toute transformation affine de $\mathbf{C}^n$ d'ordre fini dont le lieu fixe est un hyperplan affine (donc contrairement au cas des réflexions réelles, qui sont toutes d'ordre 2, les réflexions complexes peuvent avoir pour ordre n'importe quel entier ≥2). Le sujet de thèse proposé concerne l'étude des quotients $\mathbf{C}^n/\Gamma$ sous les actions de groupes CCR.

Ce sujet se trouve à l'intersection de la géométrie algébrique et de la théorie des représentations. Le quotient $\mathbf{C}^n/\Gamma$ peut être vu comme le quotient A/G par l'action d'un groupe fini, où A=$\mathbf{C}^n/\Lambda$ est un tore complexe muni d'une structure d'une variété projective algébrique, c'est à dire, une variété abélienne ; le quotient $\mathbf{C}^n/\Gamma \cong A/G$ devient, de cette façon, une variété projective algébrique, qui est un objet de la géométrie algébrique.

Lorsqu'il s'agit d'une action linéaire d'un groupe fini G engendré par des réflexions sur $\mathbf{C}^n$, le théorème de Shephard–Todd et de Chevalley dit que l'algèbre $\mathbf{C}[T_1,...,T_n]^G$ des polynômes invariants est aussi polynomiale, c'est à dire, librement engendrée par n polynômes G-invariants basiques. Le quotient $\mathbf{C}^n/G$, en tant qu'une variété affine algébrique, s'identifie avec le spectre de l'algèbre des invariants : $\mathbf{C}^n/G$ = **Spec** $\mathbf{C}[T_1,...,T_n]^G$. Le fait que l'algèbre des invariants est polynomiale signifie que le quotient est encore un espace affine complexe : $\mathbf{C}^n/G \cong \mathbf{C}^n$.

De façon similaire, la variété abélienne A introduite dans le cadre des groupes CCR se représente comme le spectre projectif de l'algèbre R de ses fonctions thêta, A = **Proj** R, et alors le quotient n'est autre que le spectre projectif de l'algèbre des invariants : A/G = **Proj** R^G. Une conjecture naturelle inspirée par le théorème de Shephard–Todd–Chevalley suggère que R^G est une algèbre des polynômes, et alors, dans le cas où Γ est un groupe CCR irréductible, le quotient **Proj** R^G est un espace projectif à poids, pondéré par les degrés des fonctions thêta invariantes basiques. Cette conjecture a été démontrée par Looijenga, Bernstein–Schwarzman, Kac–Peterson, Friedman–Morgan–Witten, Wirthmüller pour les groupes CCR du type de Coxeter (CCCR), c'est à dire, pour les groupes CCR Γ dont la partie linéaire G=dΓ est un sous-groupe du groupe orthogonal réel $\mathbf{O}(n)$.

La conjecture est aussi quasiment connue en dimension 2 depuis les année 80, quand Schwarzman, Kaneko, Tokunaga et Yoshida ont donné une liste de plans projectifs à poids qui s'obtiennent comme quotients CCR de $\mathbf{C}^2$. Cependant, leurs travaux se basaient sur une classification incomplète des groupes CCR de rang 2. Dans un article récent, Koziarz–Rito–Roulleau ont identifié encore un plan projectif à poids qui est un quotient CCR mais n'est pas présent dans les travaux précédents.

En dimension 3, le problème reste ouvert pour les groupes CCR proprement complexes, c'est à dire, qui ne sont pas du type de Coxeter. Ces groupes ont été classifiés par V. Popov. Il y a le seul cas connu, celui de l'unique groupe CCR dont la partie linéaire contient le groupe simple de Klein d'ordre 168, de symbole $[K_{24}]$ dans le tableau de Popov. Notamment, dans [2], il est démontré que le quotient $\mathbf{C}^3/\Gamma$ dans ce cas est isomorphe à l'espace projectif à poids P(1,2,4,7). La démonstration s'appuie sur le travail [1], qui donne la description des singularités du quotient, et sur la détermination de l'algèbre des fonctions thêta invariantes. A la différence du cas CCCR, celle-ci n'est pas polynomiale, mais est une seconde algèbre de Veronese de l'algèbre polynomiale définissant l'espace projectif à poids P(1,2,4,7). Il reste une énigme quel sens ont les poids 1, 2, 4, 7; dans le cas CCCR les poids du quotient sont les exposants du diagramme de Dynkin associé à Γ.

Le problème proposé pour la thèse est d'obtenir des résultats similaires pour d'autres cas dans la classification de Popov. Il faut remarquer que le cas $[K_{24}]$ est de quelque sorte le plus compliqué, car c'est l'unique groupe CCR en dimension 3 de partie linéaire quasi-simple ; dans tous les autres cas, en dimension 3, les parties linéaires dΓ sont des groupes finis résolubles. Ce thème offre des ramifications multiples dans d'autres domaines ; comme montrent déjà les travaux susmentionnés sur le cas des groupes CCCR, les quotients C^n/Γ sont liés à de nombreux autres sujets dont espaces de modules des surfaces K3 et des surfaces de del Pezzo; déformations verselles des singularités; déformations et extensions des espaces projectifs à poids; espaces de modules des fibrés principaux (torseurs) sur les courbes elliptiques. Le travail en cours [3] établit un lien avec les variétés de Calabi–Yau, algèbres de vertex et supercordes compactifiées sur des orbifoldes.

Références

[1] Dimitri Markushevich and Anne Moreau, Action of the automorphism group on the Jacobian of Klein's quartic curve, to appear in Birational Geometry, Kähler–Einstein Metrics and Degenerations, Springer Proc. Math. Stat., 409, Springer, Cham, 2023, 591–607, arXiv:2107.03745 [math.AG].

[2] Dimitri Markushevich and Anne Moreau, Action of the automorphism group on the Jacobian of Klein's quartic curve II: Invariant theta-functions, Épijournal Géom. Algébrique 8 (2024), Art. 9, 21 pp.

[3] Dan Israël, Dimitri Markushevich and Anne Moreau, Action of the automorphism group on the Jacobian of Klein's quartic curve II: Superstring compactifications, work in progress.