

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2025

Titre : Méthodes diffusives et matrices aléatoires

Directrice de thèse : Mylène Maïda

E-mail : mylene.maida@univ-lille.fr

Co-encadrant de thèse : Raphaël Butez

E-mail : raphael.butez@univ-lille.fr

Laboratoire : Paul Painlevé

Equipe : Probabilités et statistique

Descriptif : Dès les origines de la théorie des matrices aléatoires, des processus de Markov à valeurs dans des ensembles de matrices ont été construits et étudiés. Le premier exemple, et sans doute le plus connu, est le *mouvement brownien de Dyson*: il s'agit du processus des valeurs propres d'un mouvement brownien standard dans l'espace des matrices hermitiennes de taille fixée. Ce processus tient son nom du physicien qui l'a introduit dans les années 60. La répulsion entre les valeurs propres de matrices aléatoires induit une dynamique difficile à analyser à cause de la singularité de l'interaction. Ce processus a suscité beaucoup d'intérêt auprès des physiciens comme auprès des probabilistes, (voir par exemple [1]) et même plus récemment auprès des spécialistes des équations aux dérivées partielles [2]. On dispose maintenant d'un corpus important de résultats concernant le comportement asymptotique de la mesure empirique des particules d'un mouvement brownien de Dyson (convergence vers une solution de l'équation de Fokker-Planck, étude de ses fluctuations, de ses déviations, inégalités fonctionnelles), celui de la plus grande particule ou encore la limite du processus du point de vue des probabilités libres. Les propriétés régularisantes du mouvement brownien de Dyson ont été exploitées avec grand succès, notamment pour établir des lois locales pour divers modèles de matrices aléatoires (voir [3]).

Le mouvement brownien de Dyson est intimement lié à l'ensemble unitaire gaussien (GUE), dans le sens où la loi jointe des valeurs propres du GUE en est la mesure invariante. À partir de ce point de vue, on peut construire de nombreuses généralisations, c'est-à-dire des systèmes dynamiques aléatoires, dont la mesure invariante est la loi jointe des valeurs d'autres modèles de matrices (CUE, LUE, Ginibre [4] etc.) ou des mesures de Gibbs du même type, comme des gaz de Coulomb, des gaz de Riesz etc.

Récemment, des techniques inspirées de l'étude du mouvement brownien de Dyson pour des diffusions plus générales (notamment des dynamiques de Langevin) ont permis d'obtenir des résultats importants dans l'étude des gaz de Coulomb sur le plan théorique (see [4]) ou pratique via des algorithmes de simulation de systèmes complexes (see [5]).

L'étude de versions dynamiques de ces systèmes de particules est récente (en particulier lorsqu'on va au-delà de la dimension 1) et de nombreuses questions sont à explorer.

L'objet de cette thèse sera dans un premier temps d'améliorer la compréhension mathématique de ces systèmes dynamiques aléatoires et éventuellement d'utiliser ces nouveaux résultats pour mieux comprendre les mesures invariantes sous-jacentes.

Bibliographie

- [1] Anderson, G. W., Guionnet A., Zeitouni, O. *An introduction to random matrices*. Cambridge Univ. ; 2010.
- [2] Bertucci C., Debbah M., Lasry J.-M., Lions P.-L., *A spectral dominance approach to large random matrices*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 164, 27-56, 2022.
- [3] Erdős L, Yau H. *A Dynamical Approach to Random Matrix Theory*. Vol 28. American Mathematical Society; 2017. doi:10.1090/cln/028
- [4] Bolley F., Chafaï D., Fontbona J., *Dynamics of a planar Coulomb gas*. Ann. Appl. Probab. 28 (5) 3152 - 3183, October 2018. <https://doi.org/10.1214/>
- [5] Chafaï, D., Ferré, G. (2019). *Simulating Coulomb and log-gases with hybrid Monte Carlo algorithms*. Journal of Statistical Physics 174(3), 692-714. doi:10.1007/s10955-018-2195-6