

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2025

Titre : Solitons, multi-solitons et comportement en temps long pour des équations de Schrödinger non-linéaires avec non-linéarité singulière
Directeur de thèse : Sahbi Keraani E-mail : sahbi.keraani@univ-lille.fr
Co-encadrant de thèse : Guillaume Ferriere E-mail : guillaume.ferriere@inria.fr
Co-encadrant de thèse : Vianney Combet E-mail : vianney.combet@univ-lille.fr
Laboratoire : Laboratoire Paul Painlevé
Equipe : ANEDP

Descriptif : Les équations de Schrödinger non-linéaires (NLS) sont des équations aux dérivées partielles (EDP) très importantes en physique, en particulier en mécanique et en optique quantiques ainsi que pour la théorie des condensats de Bose-Einstein. D'un point de vue mathématique, de nombreuses études ont été réalisées pour mieux comprendre le comportement en temps long des solutions à ces équations, que cela concerne le scattering lorsque la non-linéarité est défocalisante ou les (multi-)solitons dans les modèles focalisants. Pour ce dernier cas, la conjecture de résolution en solitons motive fortement la communauté mathématique, même si elle reste encore hors de portée à part dans le cas intégrable de la non-linéarité cubique en dimension 1.

De telles études se concentrent principalement sur un cadre « lisse » : lorsque la non-linéarité est du type

$f(|u|^2)u$ (où u est la solution à l'équation), f est souvent supposé au minimum lipschitzienne. Une exception majeure concerne l'équation de Schrödinger non-linéaire avec non-linéarité logarithmique (logNLS), introduite en physique théorique en 1976 pour sa propriété de séparabilité des variables, unique dans le cadre des équations de Schrödinger non-linéaires. Depuis, plusieurs modèles physiques utilisant cette non-linéarité logarithmique ont été introduits en mécanique et optique quantiques, en physique nucléaire, en mécanique bohémienne, en gravité quantique, en théorie de la superfluidité et des condensats de Bose-Einstein. Les premières études mathématiques pour cette équation datent du début des années 1980 [4, 5], mais un regain d'intérêt a lieu depuis 2014, dû à des résultats surprenants démontrant le caractère complexe de cette non-linéarité [1, 2, 3, 6, 7, 8].

Dans cette thèse, on se propose de s'intéresser à des équations de Schrödinger non-linéaires dont la non-linéarité, du type $f(|u|^2)u$, présente une singularité sur f en 0. Dans un premier temps, on pourra se focaliser sur des non-linéarités qui sont des perturbations

polynomiales ou « lisses » du logarithme, avant de regarder des non-linéarités plus générales. L'accent sera d'abord mis sur le cas focalisant, et donc sur des études de type existence et stabilité orbitale des solitons et des solutions de type multi-soliton.

Par la suite, si le temps le permet, on pourra s'intéresser à des sujets dans la continuité, tels que :

- Une étude du cadre semi-classique : analyse BKW, états cohérents, ... ;
- une amélioration des résultats concernant le comportement en temps long de logNLS défocalisant ;
- le cadre Gross-Pitaevskii en régime défocalisant, pour des solutions dont le module tend vers 1 à l'infini ;
- ...

[1] A. H. Ardila. Orbital stability of Gausson solutions to logarithmic Schrödinger equations. *Electron. J. Differential Equations*, Vol. 2016, No. 335, pp. 1-9.

[2] R. Carles and I. Gallagher. Universal dynamics for the defocusing logarithmic Schrödinger equation. *Duke Mathematical Journal*, 167(9) :1761–1801, 2018.

[3] R. Carles, M. Hayashi and T. Ozawa. Low regularity solutions to the logarithmic Schrödinger equation. *Pure and Applied Analysis*, 2024, 6 (3), pp.859-871.

[4] T. Cazenave. Stable solutions of the logarithmic Schrödinger equation. *Nonlinear Anal.*, 7(10) :1127–1140, 1983.

[5] T. Cazenave and A. Haraux. Equations d'évolution avec non linéarité logarithmique. *Annales de la faculté de sciences de Toulouse*, 5e série, II :21–55, 1980.

[6] G. Ferriere. Convergence rate in Wasserstein distance and semiclassical limit for the defocusing logarithmic Schrödinger equation. *Analysis & PDE*, 2021, 14 (2), pp.617-666.

[7] G. Ferriere. Existence of multi-solitons for the focusing Logarithmic Non-Linear Schrödinger Equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 38 (2021), no. 3, pp. 841–875.

[8] M. Hayashi and T. Ozawa. The Cauchy Problem for the Logarithmic Schrödinger Equation Revisited. *Ann. Henri Poincaré* (2024).