Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2025

Titre : Propriétés typiques de certaines classes de systèmes dynamiques linéaires et existence de sous-espaces invariants
Directeur de thèse : Sophie GRIVAUX
E-mail : sophie.grivaux@univ-lille.fr
Co-directeur de thèse :
E-mail :
Laboratoire : LPP
Equipe : Analyse

Descriptif : Ce sujet de thèse porte sur l'étude de certaines propriétés de nature dynamique de systèmes dits linéaires, c'est-à-dire donnés par l'action d'un opérateur linéaire et continu sur un espace de Banach X séparable, usuellement complexe, de dimension infinie. Si (X,T) est un système dynamique linéaire, étudier ses propriétés dynamiques consiste à étudier les propriétés de ses orbites : étant donné un vecteur x de X, l'orbite de x sous l'action de T est l'ensemble des vecteurs de la forme T^n x, où n est un entier positif ou nul et T^n désigne le n-ième itéré de l'opérateur T. Dans ce contexte, l'étude des vecteurs à orbite dense, appelés vecteurs hypercycliques ,est particulièrement intéressante (cf. les deux ouvrages récents [BM] et [GP]). Une des raisons de l'intérêt de cette étude est son lien avec deux problèmes extrêmement importants en théorie des opérateurs, à savoir les Problèmes du Sous-espace et du Fermé Invariant. Le Problème du Sous-espace Invariant pose la question de savoir si, étant donné un opérateur T sur X, il existe un sous-espace fermé M de X non-trivial et T-invariant, tandis que le Problème du Fermé Invariant concerne l'existence d'un fermé T-invariant non-trivial. Remarquons que T possède un sous-espace invariant non-trivial (respectivement un fermé invariant non-trivial) si et seulement si il existe un vecteur non nul non-cyclique (respectivement non-hypercyclique) pour T.

Les Problèmes du Sous-espace Invariant et du Fermé Invariant ont été tous deux résolus par la négative (par Enflo et Read, et Read, respectivement). Le problème est cependant très largement ouvert dans le cas réflexif, en particulier dans le cas Hilbertien : si T est un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, T possède-t-il toujours un sous-espace invariant non-trivial ? un fermé invariant non-trivial ?
Il est usuellement fort difficile de déterminer si des opérateurs d'une classe donnée, définis par des conditions de nature analytique, possèdent ou non un sous-espace invariant non-trivial, et cela nécessite souvent le développement d'outils assez sophistiqués (de type calcul fonctionnel par exemple) qui peuvent être utilisés pour une classe donnée d'opérateurs, mais qui sont inadaptés pour l'étude d'autres familles qui sembleraient pourtant assez voisines. Pour tenter de pallier cette difficulté, ce sujet de recherche propose d'attaquer ce type de problème sous l'angle de la généricité au sens de Baire.

Décrivons brièvement cette approche : étant donné un espace de Banach (séparable, de dimension infinie) X, on munit les boules fermées, c'est-à-dire l'ensemble B_M(X) des opérateurs continus sur X de norme inférieure ou égale à M, de topologies (nécessairement plus faibles que celle de la norme opérateur) qui en font des espaces polonais, dans lequel le théorème de Baire est valable. On dit alors qu'une propriété (P) des éléments de

B_M(X) est typique (pour la topologie considérée) si l'ensemble des opérateurs de B_M(X) possédant la propriété (P) est résiduel dans B_M(X), c'est-à-dire contient une intersection dénombrable de parties ouvertes et denses. Autrement dit, presque tous les éléments de B_M(X) vérifient la propriété (P) (dans le sens précisé ci-dessus).

L'étude des propriétés typiques des opérateurs de l'espace de Hilbert séparable complexe H pour deux topologies classiques, SOT et SOT*, a été entreprise par Eisner et Matrai dans l'article [EM]. Ils y montrent qu'un opérateur SOT-typique de B_M(H) a un sous-espace invariant non trivial. L'étude des propriétés des opérateurs de l'espace de Hilbert a été poursuivie dans le mémoire [GMM]. Le but de ce sujet de thèse est de développer ce type de méthodes pour étudier certaines classes particulières d'opérateurs hilbertiens. Supposons que (T_a) est une famille de ce type, paramétrée par un paramètre a appartenant à un espace polonais A (l'espace des paramètres pouvant être de dimension infinie). Dans un certain nombre de cas concrets, des méthodes ad hoc ont été développées pour montrer, par exemple, l'existence de sous-espaces invariants pour certaines valeurs du paramètre, précisément décrites. Le but est ici de montrer que pour presque toute valeur du paramètre a, T_a possède un sous-espace invariant non-trivial. Des résultats pourraient être obtenus pour les classes d'opérateurs suivantes, qui ont été récemment l'objet de nombreux travaux, et pour lesquelles le Problème du Sous-espace Invariant reste ouvert :

(T1) *Les perturbations de rang 1 d'opérateurs généraux.* Tcaciuc a montré très récemment dans [T] que tout opérateur T sur un espace de Banach séparable complexe X possède une perturbation de rang au plus 1 ayant un sous-espace invariant de dimension et de codimension infinies. Est-ce vrai pour presque toute perturbation ?

(T2) *Les perturbations de rang 1 d'opérateurs unitaires*, ou plus particulièrement d'opérateurs diagonaux unitaires sur l'espace de Hilbert. Les méthodes employées ici pour montrer l'existence de sous-espaces invariants sont très disparates. Est-il vrai que presque toute perturbation de rang 1 d'un opérateur unitaire d'une certaine classe admet un sous-espace invariant ?

(T3) *Les perturbations par des décalages à gauche pondérés d'opérateurs diagonaux unitaires.* Quelles sont les propriétés dynamiques typiques de ces sommes d'opérateurs ? Cette étude a été entamée dans [GMM]. On peut espérer caractériser complètement l'hypercyclicité ou le caractère chaotique de ces classes d'opérateurs.

Bibliographie :

[BM] F. Bayart, É. Matheron, *Dynamics of linear operators,* Cambridge Tracts in Mathematics **179** (2009), Cambridge University Press.

[CP] I. Chalendar, J. R. Partington, *Modern aspects of the Invariant Subspace Problem,* Cambridge Tracts in Mathematics **188** (2011), Cambridge University Press.

[EM] T.Eisner, T. Matrai, On typical properties of Hilbert space operators, *Israel J. Math.* **195** (2013), p. 247–281.

[GMM] S. Grivaux, É. Matheron et Q. Menet, Linear dynamical systems on Hilbert spaces: typical properties and explicit examples, à paraître dans *Mem. Amer. Math. Soc.*.

[GP] K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris, *Linear chaos,* Universitext Springer (2011).

[T] A. Tcaciuc,The invariant subspace problem for rank-one perturbations, *Duke Math. J.* **168** (2019),p. 1539–1550.