

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2026

Titre : Théorie de Ramsey structurelle de l'espace de Banach c_0 et plongements non-linéaires

Directeur de thèse : Emmanuel Fricain

E-mail : emmanuel.fricain@univ-lille.fr

Co-encadrant : Noé de Rancourt

E-mail : nederancour@univ-lille.fr

Laboratoire : Laboratoire Paul Painlevé

Equipe : Analyse

Descriptif : Le but de ce sujet est l'étude de l'espace de Banach c_0 du point de vue de la théorie de Ramsey, une branche de la combinatoire étudiant les coloriages de structures et l'existence de grandes sous-structures sur lesquelles ces coloriages ont un comportement régulier. Il existe déjà des résultats de type Ramsey sur c_0 , dus à Gowers, mais ils concernent uniquement les coloriages de certaines suites de vecteurs bien positionnées, les *bloc-suites*. On se propose dans cette thèse de tenter d'obtenir des résultats pour *toutes* les suites de vecteurs. On se rapprochera ainsi de l'esprit de la *théorie de Ramsey structurelle*, une branche de la théorie de Ramsey en plein essor pour les structures discrètes, et commençant à se développer pour les structures continues.

L'objectif est double. Premièrement, c_0 est un bon cas test pour le développement de la théorie des *grands degrés de Ramsey non-compacts*. Les grands degrés de Ramsey sont des invariants de certaines structures, centraux en théorie de Ramsey structurelle. D'abord étudiés pour les structures discrètes, ils ont été récemment généralisés à certaines structures continues par Bice, de Rancourt, Hubička et Konečný ; dans ce cadre, ces invariants sont des espaces métriques compacts. Le développement de versions non-compacts est une question naturelle, motivée par les problèmes de distorsion en géométrie des espaces de Banach, et pourra être abordé dans cette thèse.

Deuxièmement, on pourra envisager des applications à la géométrie non-linéaire des espaces de Banach. Cette théorie étudie notamment les plongements non-linéaires entre espaces de Banach (plongements lipschitziens, grossiers...) ; une question centrale, étudiée par Kalton et plus récemment par Braga, Lancien, Petitjean et Procházka, est celle de savoir dans quels espaces de Banach c_0 se plonge pour ces différentes notions. Un objectif de cette thèse sera l'obtention de résultats de Ramsey canoniques dans c_0 , qui pourraient aider à l'étude de cette question.

Des connaissances de base en analyse fonctionnelle et topologie générale (niveau master) sont recommandées pour postuler à ce sujet.

Ce sujet s'inscrit dans l'axe *Systèmes dynamiques complexes* du CDP C²EMPI.