

Ecole Doctorale 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2024

Titre : Étude théorique et numérique de solitons sombres d'équations de Schrödinger non-linéaires

Directeur de thèse : DUJARDIN Guillaume

E-mail : guillaume.dujardin@inria.fr

Co-directeur de thèse : DE LAIRE André

E-mail : andre.de-laire@univ-lille.fr

Laboratoire : Paul Painlevé

Equipe : ANEDP

Descriptif : L'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) apparaît à de multiples endroits en physique, par exemple dans la modélisation des atomes froids (à l'état de condensats de Bose–Einstein), et en optique non linéaire. Il est bien connu que cette équation admet des solutions particulières appelées *solitons*, qui ont la particularité de se déplacer à vitesse finie sans se déformer. Ces solitons jouent par ailleurs un rôle essentiel dans la dynamique globale de cette équation.

Dans cette thèse, on se propose de s'intéresser à des versions plus complexes de l'équation de NLS, motivées par des applications physiques plus réalistes. Concrètement, on souhaite considérer cette équation avec des conditions non-nulles à l'infini d'une part, et d'autre part avec des non-linéarités plus générales, par exemple non locales, ou quasi-linéaires. Dans ce contexte, par opposition aux solitons classiques dits "clairs" (*bright*), les solitons observés sont dits "sombres" (*dark*). Les principaux objectifs de la thèse comprennent :

- **le calcul numérique de solitons sombres**, où les conditions aux limites sont périodiques dans une direction et de module tendant vers une constante non nulle dans l'autre. Dans le contexte de [5]. On souhaite en particulier utiliser une version discrétisée de la formulation variationnelle introduite dans ce papier. L'enjeu est d'être capable de quantifier numériquement la transition observée entre les solitons sombres "issus de la dimension 1" (lorsque la taille du tore est « petite ») et les solitons sombres "vraiment" de dimension 2 (lorsque la taille du tore est « grande »).
- **la simulation numérique de la dynamique** d'équations de NLS avec conditions non nulles aux limites, et la description numérique de l'interaction entre solitons sombres, et entre solitons sombres et clairs, en dimension 2. Quelques travaux numériques existent dans la littérature [2, 3] en dimensions 1 et 2, qui donnent des pistes sur les méthodes utilisables afin de tenir compte numériquement des conditions aux limites non nulles. Nous souhaitons dans un premier temps étendre ces méthodes au contexte théorique introduit dans [5], afin de produire des méthodes numériques simulant la dynamique de cette équation. Par la suite, nous pourrions aborder la question de la description numérique de l'interaction entre solitons sombres, et entre solitons sombres et clairs, en dimension 2 (dans l'esprit de [3] en dimension 1), de manière à ouvrir la voie pour une étude théorique future.
- **l'introduction de termes non-linéaires plus généraux** dans l'équation de NLS, par exemple des termes non-locaux ou des termes quasi-linéaires, dans le contexte bi-dimensionnel. Par exemple des termes non-locaux (voir [4] pour des exemples en dimension 1), ou des termes quasi-linéaires (voir [6]

pour des exemples et une étude théorique en dimension 1). Avec ces termes supplémentaires, nous souhaitons poser, dans le contexte bi-dimensionnel et avec des conditions aux limites non-nulles, à nouveau la question du calcul numérique des solitons (voir le premier objectif) ainsi que celle de l'intégration numérique de la dynamique (voir le deuxième objectif).

- [1] M. J. Ablowitz. *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2011.
- [2] W. Bao. Numerical methods for the nonlinear Schrödinger equation with nonzero farfield conditions. *Methods and Applications of Analysis*, 11(3):367–388, 2004.
- [3] W. Bao, Q. Tang, and Z. Xu. Numerical methods and comparison for computing dark and bright solitons in the nonlinear schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*, 235:423–445, 2013.
- [4] A. de Laire, G. Dujardin, and S. López-Martínez. Numerical computation of dark solitons of a nonlocal nonlinear Schrödinger equation. To appear in *Journal of Nonlinear Science*, 2023.
- [5] A. de Laire, Philippe Gravejat, and D. Smets. Minimizing travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. To appear in *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.
- [6] A. de Laire and E. Le Quiniou. Exotic traveling waves for a quasilinear Schrödinger equation with nonzero background. Preprint arXiv:2311.08918