

Ecole Doctorale 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2024

Titre : Rigidité des gaz de Riesz et réseaux perturbés dépendants

Directeur de thèse : DEREUDRE david

E-mail : david.dereudre@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse :

E-mail :

Laboratoire : Paul Painlevé UMR CNRS 8524

Equipe : Probabilités et Statistiques

Descriptif :

Ce projet s'inscrit dans la continuité de travaux récents autour de la rigidité des gaz de Riesz en dimension d et pour le paramètre de portée s lié au potentiel d'interaction $1/|x|^s$. L'étude de la Number-Rigidité et de l'hyperuniformité de tels processus ponctuels est actuellement une question majeure du domaine. Rappelons-en les définitions:

Hyperuniformité: On dit qu'un processus ponctuel est hyperuniforme si la variance du nombre de points dans un domaine borné est négligeable devant le volume de ce domaine lorsque le volume tend vers l'infini. Cette définition provient originellement de la physique statistique car elle indique la non-compressibilité d'un fluide et joue également un rôle essentiel de neutralité des charges dans les gaz de particules chargées. Pour les gaz de Riesz, l'hyperuniformité est démontrée dans le cas de la dimension $d=1$ et dans le cas Coulombien en dimension $d=2$. Dans les autres cas, la question est ouverte et il est conjecturé que l'hyperuniformité apparaît dès que le paramètre d'interaction $s < d$.

Number-Rigidité: On dit que le processus ponctuel est Number-Rigide si le nombre de points dans tout domaine borné est presque sûrement déterminé par la configuration de points en dehors de ce domaine. Cette propriété est considérée comme un indicateur de cristallisation en physique statistique. Pour les gaz de Riesz, la Number-Rigidité est démontrée dans le cas $d=1, s=0, -1$. Il est également démontré qu'il n'y a pas Number-Rigidité dans le cas $s > d-1$ et $d > 2, s = d-2$. Dans les autres cas, la question est ouverte et il est conjecturé que la Number-Rigidité apparaît uniquement pour s inférieur ou égal à 0.

Dans cette thèse, nous allons nous attaquer à ces conjectures de rigidité à l'aide d'une nouvelle approche basée sur les réseaux perturbés dépendants. Il s'agit de représenter un gaz de Riesz via une perturbation du réseau carré à l'aide d'une suite de vecteurs aléatoires identiquement distribués. Bien sûr, l'indépendance entre les variables sera perdue dans cette représentation. Ce sera la première étape de la thèse et elle devrait essentiellement s'appuyer sur des méthodes entropiques. Nous pourrions alors exploiter cette structure pour montrer l'hyperuniformité en dimension $d=2$ en montrant que les variables ont des moments d'ordre 2. Ce sera la deuxième étape de la thèse qui s'appuiera sur des études récentes sur l'hyperuniformité des réseaux perturbés dépendants. Dans un troisième temps, la Number-rigidité devrait pouvoir s'attaquer à l'aide des méthodes développées par Peres et Sly dans le cas indépendant.