

Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2025

Titre : Étude de fonctions Mock-Theta de Ramanujan du point de vue de la théorie analytique des équations aux q-différences

Directeur de thèse : Changgui ZHANG

E-mail : changgui.zhang@univ-lille.fr

Laboratoire : Laboratoire Paul Painlevé

Equipe : Analyse

Descriptif :

Au début des années 1910, Ramanujan a envoyé dans des courriers à Hardy, depuis l'Inde, des listes de fonctions spéciales qu'il appelait mock-theta. Ces fonctions ont ensuite été examinées par de nombreux mathématiciens, venant de l'Analyse ou la théorie des nombres, tels que G. N. Watson, G. E. Andrews, etc. Tout récemment, elles ont connu un regain d'intérêt en raison de leurs féconds liens avec la théorie conforme des champs et de la K-théorie algébrique. Un exposé notable sur ce sujet a été donné par D. B. Zagier au Séminaire Bourbaki en 2007.

Dans ce domaine, la plupart d'études faites ces vingt dernières années sont concentrées sur le côté algébrique ou modulaire. Pourtant nous pouvons interpréter certaines d'entre elles au moyen des séries dites d'Appell-Lerch, ces dernières étant solutions d'une famille d'équations aux q-différences ayant une singularité non-fuchsienne à l'origine.

L'objectif de cette thèse est d'étudier les fonctions mock-thêta d'ordre 3 de Ramanujan à travers la théorie analytique des équations aux q-différences. En particulier, nous chercherons à déterminer si ces fonctions possèdent un comportement analogue à celui des fonctions thêta classiques au voisinage de chaque racine de l'unité.

D. Hickerson et E. Mortenson, Dyson's ranks and Appell-Lerch sums, *Math. Ann.* 367 (2017), no. 1-2, 373–395.

G. N. Watson, The final problem: an account of the mock theta functions. *J. Lond. Math. Soc.* **11**, 55–80 (1936)

D. B. Zagier, Ramanujan's mock theta functions and their applications [d'après Zwegers and Bringmann-Ono], *Séminaire Bourbaki*, 2007-2008, no. 986

C. Z. On the mock-theta behavior of Appell-Lerch series. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 353 (2015), no. 12, 1067–1073.