



## Ecole Graduée 631 MADIS

### Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2023

**Titre :** Analyse par ondelettes de Champs Multifractionnaires Stables Harmonisables

**Directeur de thèse :** Antoine Ayache

**E-mail :** [antoine.ayache@univ-lille.fr](mailto:antoine.ayache@univ-lille.fr)

**Co-directeur de thèse :**

**E-mail :**

**Laboratoire :** Paul Painlevé

**Equipe :** Probabilités et Statistique

**Descriptif :** Les champs et processus stochastiques multifractionnaires sont des généralisations naturelles des mouvements brownien et brownien fractionnaire. Leur caractéristique essentielle est que leurs propriétés locales (autosimilarité et régularité des trajectoires) peuvent être prescrites via un paramètre fonctionnel (la fonction de Hurst) et peuvent donc changer significativement d'un point à un autre. Ainsi, de tels champs et processus fournissent des modèles possédant une plus grande flexibilité que les traditionnels mouvements brownien et brownien fractionnaire, ce qui les rend d'une utilité considérable dans la modélisation et le traitement du signal et de l'image. Les champs et processus multifractionnaires présentent de l'intérêt non seulement du point de vue des applications (finance, télécommunications, cosmologie, etc.) mais aussi d'un point de vue théorique parce qu'ils mettent parfois à défaut certaines théories classiques et permettent d'exhiber des phénomènes nouveaux. Leur étude est depuis plus de deux décennies un domaine de recherche vivant et en expansion, qui se situe à l'intersection de trois branches des mathématiques : les probabilités, la statistique et l'analyse réelle. Le livre [A] présente certains aspects théoriques essentiels de ce domaine.

Dozzi et Shevchenko ont introduit dans leur article [DS] un Processus Multifractionnaire Stable Harmonisable (PMSH), indexé par un indice monodimensionnel, qui est défini par une intégrale stochastique dans le domaine fréquentiel et dont les lois finies-dimensionnelles sont  $\alpha$ -stables à queue lourde. La stratégie employée par ces deux auteurs pour étudier les propriétés de régularité de ce processus et celles de son temps local (bicontinuité, etc.) repose de façon essentielle sur la condition  $\alpha > 1$ , qu'ils imposent au paramètre de stabilité  $\alpha$  qui permet de contrôler la lourdeur des queues des lois marginales ; grâce à cette condition ils parviennent à utiliser l'importante inégalité classique de Hausdorff-Young qui relie une norme  $L^p$  d'une fonction à une norme  $L^q$  de sa transformée de Fourier. Une telle stratégie n'est guère utilisable lorsque  $\alpha \leq 1$  (parce que l'inégalité de Hausdorff-Young n'est plus valable) ou encore dans le cas (plus général que celui du PMSH) d'un Champ Multifractionnaire Stable Harmonisable (CMSH) indexé par un indice multidimensionnel. L'objet principal de la thèse sera de mettre en œuvre une stratégie alternative pour l'étude de ce champ qui repose sur des méthodes d'ondelettes.

Dans le cadre de cette thèse, contrairement à l'article [DS], aucune condition ne sera a priori imposée au paramètre de stabilité  $\alpha$  et on cherchera à atteindre les objectifs suivants :

(1) Construire pour un CMSH une représentation en série aléatoire d'ondelettes presque sûrement uniformément convergentes ; puis utiliser cette représentation pour étudier finement le comportement local et à l'infini de ce champ par des méthodes qui sont plus ou moins dans le même esprit que celles de l'article [AB].



- (2) En s'inspirant des méthodologies des deux articles [ASX] et [AX], tenter d'établir qu'un CSMH possède la cruciale *propriété de non déterminisme local* (il s'agit grosso modo d'une forme faible de la propriété de l'indépendance des accroissements). Ensuite, essayer d'obtenir, au moyen de cette propriété, la bicontinuité du temps local d'un CSMH et pousser éventuellement plus loin l'étude de la régularité de ce temps local.
- (3) En s'inspirant de certaines idées de l'article [FL], chercher à construire un champ stochastique multistable harmonisable qui étend le CSMH puis étudier le comportement des trajectoires de ce nouveau champ multistable.
- (4) Essayer de construire des estimateurs statistiques pour la fonction de Hurst et le paramètre de stabilité d'un CSMH.

### **Bibliographie :**

- [A] A. Ayache. *Multifractional stochastic fields: wavelet strategies in multifractional frameworks*. World Scientific (2019).
- [AB] A. Ayache, G. Boutard. *Stationary increments harmonizable stable fields: upper estimates on path behaviour*. Journal of Theoretical Probability, Vol. 30, Iss. 4, pp. 1369-1423, (2017).
- [AX] A. Ayache, Y. Xiao. *Harmonizable fractional stable fields: local nondeterminism and joint continuity of the local times*. Stochastic Processes and their Applications, Vol. 126, Iss. 1, pp. 171-185, (2016).
- [ASX] A. Ayache, N.R. Shieh, Y. Xiao. *Multiparameter multifractional Brownian motion: local nondeterminism and joint continuity of the local times*. Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistique. Vol. 47, Iss. 4, pp. 1029-1054, (2011).
- [DS] M. Dozzi, G. Shevchenko. *Real harmonizable multifractional stable process and its local properties*. Stochastic Processes and their Applications, Vol. 121, Iss. 7, pp. 1509-1523, (2011).
- [FL] K. Falconer, L. Liu. *Multistable processes and localizability*. Stochastic Models, Vol. 28, Iss. 3, pp. 503-526, (2012).