Ecole Graduée 631 MADIS

Sujet de thèse en Mathématique proposé en 2026

Titre : Extensions non-gaussiennes et/ou multifractionnaires du mouvement brownien fractionnaire généralisé de Pang et Taqqu

Directeur de thèse : Antoine Ayache
E-mail : antoine.ayache@univ-lille.fr

Co-directeur de thèse :
E-mail :

Laboratoire : Paul Painlevé

Equipe : Probabilités et Statistique

Descriptif : Le mouvement brownien fractionnaire (mbf) $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est l'un des processus gaussiens les plus connus ; il s'agit en fait d'une extension tout à fait naturelle du mouvement brownien qui, contrairement à ce dernier, possède des accroissements corrélés entre eux. Le mbf a été abondamment étudié, non seulement à cause de son grand intérêt d'un point de vue théorique mais aussi parce qu'il est très utile dans de nombreuses applications liées entre autres au traitement du signal. Il dépend du seul paramètre $H \in]0,1[$, appelé le paramètre de Hurst, et il est défini par l'intégrale stochastique de Wiener-Itô : $B_H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left((t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}\right) dB(s)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il est auto-similaire (invariant en loi par changements d'échelle), ce qui en fait un objet de nature fractale. De plus, ses accroissements sont stationnaires (invariant en loi par translations).

Il y a quelques années l'article [PT] a introduit le mouvement brownien fractionnaire généralisé (mbfg) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ qui, quant-à-lui, dépend de deux paramètres, le paramètre de Hurst $H \in]0,1[$ et un autre paramètre $\gamma \in [0,1[$. Ce processus gaussien est défini par : $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left((t-s)_+^{H-1/2-\gamma/2} - (-s)_+^{H-1/2-\gamma/2}\right)|s|^{-\gamma/2}\, dB(s)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Divers résultats concernant le comportement de ses trajectoires ont été obtenus dans les trois articles [IPT1, WX1, WX2]. Bien que $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ soit auto-similaire ses accroissements sont non-stationnaires, ce qui le rend plus flexible que le mbf et donc mieux adapté que lui à la modélisation de certains phénomènes par exemple en finance, comme le souligne l'article [IPT2]. Cependant le caractère gaussien de $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et le fait que ses paramètres restent constants au cours du temps constituent de sérieuses restrictions de ce modèle ; d'où l'intérêt de chercher à construire et à étudier des processus stochastiques non-gaussiens et/ou multifractionnaires (les paramètres constants du mbfg sont remplacés par des fonctions ou même des processus stochastiques) qui l'étendent.

Dans le cadre de cette thèse on cherchera à atteindre les cinq objectifs suivants :

(1) Étudier le comportement des trajectoires et des propriétés en loi d'une première extension multifractionnaire gaussienne du mbfg, désignée par $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et obtenue en remplaçant les paramètres H et γ par des fonctions déterministes $H(t)$ et $\gamma(t)$ dépendant de la variable t qui représente le temps et sert d'indice pour le processus. Pour ce faire on cherchera entre autres à utiliser des méthodologies qui s'inspirent de celles présentées dans le livre [A1] et de celles introduites dans l'article [A2].

(2) Étudier le comportement des trajectoires et des propriétés en loi d'une seconde extension multifractionnaire non-gaussienne du mbfg, désignée par $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et obtenue en remplaçant les paramètres H et γ par des processus stochastiques $\{H(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ et $\{\gamma(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ adaptés à la filtration du mouvement brownien $\{B(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ qui engendre l'intégrale stochastique de Wiener-Itô. Pour ce faire on cherchera entre autres à mettre en œuvre des méthodologies qui s'inspirent de celles des deux articles [LMS, AB2].

(3) Étudier le comportement des trajectoires et des propriétés en loi d'une extension non-gaussienne de lois marginales stables à queues lourdes du processus multifractionnaire $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, désignée par $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et obtenue en remplaçant le mouvement brownien $\{B(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$, qui engendre l'intégrale stochastique de Wiener-Itô, par un processus de Lévy stable. Pour ce faire on cherchera entre autres à utiliser des méthodologies qui s'inspirent de celles des trois articles [ST1, ST2, AH1].

(4) Essayer de trouver des méthodes permettant la simulation sur un intervalle compact des trajectoires des processus multifractionnaires $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. Pour ce faire on cherchera entre autres à s'inspirer des méthodes de simulation, via la base de Haar, introduites dans les deux articles [H, AEH].

(5) Essayer de trouver des estimateurs statistiques pour les paramètres des processus multifractionnaires $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ et $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, et des lois limites pour ces estimateurs. Pour ce faire on cherchera entre autres à s'inspirer de certaines idées des trois articles [AB2, AH1, BS].

Bibliographie :

[A1] A. Ayache. *Multifractional stochastic fields: wavelet strategies in multifrational frameworks.* World Scientific (2019).

[A2] A. Ayache. *Lower bound for local oscillations of Hermite processes*. Stochastic Processes and their Applications, Vol. 130, Iss. 8, pp. 4593-4607, (2020).

[AB1] A. Ayache, F. Bouly. *Moving average multifractional processes with random exponent: lower bound for local oscillations.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. 146, pp. 143-163, (2022).

[AB2] A. Ayache, F. Bouly. *Uniformly and strongly consistent estimation for the random Hurst function of a multifractional process.* ALEA, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, Vol. 20, Iss. 2, pp. 1587-1614, (2023).

[AEH] A. Ayache, C. Esser, J. Hamonier. *A new multifractional process with random exponent.* Risk and Decision Analysis, Vol. 7, Iss. 1-2, pp. 5--29, (2018).

[AH1] A. Ayache, J. Hamonier. *Linear multifractional stable motion: fine path properties.* Revista Matemática Iberoamericana, Vol. 30, Iss. 4, pp. 1301-1354 (2014).

[AH2] A. Ayache, J. Hamonier. *Uniformly and strongly consistent estimation for the Hurst function of a linear multifractional stable motion.* Bernoulli, Vol. 23, Iss. 2, 1365-1407 (2017).

[BS] J.-M. Bardet, D. Surgailis. *Nonparametric estimation of the local Hurst function of multifractional Gaussian processes.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. 123, Iss. 3, pp. 1004-1045, (2013).

[H] J. Hamonier. *Linear Multifractional Stable Motion: Representation via Haar basis.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. 125, Iss. 3, pp. 1127-1147, (2015).

[IPT1] T. Ichiba, G. Pang, M.S. Taqqu. *Path properties of generalized fractional Brownian motion.* Journal of Theoretical Probability, Vol. 35, Iss. 1, pp. 550-574, (2022).

[IPT2] T. Ichiba, G. Pang, M.S. Taqqu. *Semimartingale properties of a generalized fractional Brownian motion and its mixtures with applications in asset pricing.* Finance and Stochastics, Vol. 29, Iss. 3, pp. 757-789, (2025).

[LMS] D. Loboda, F. Mies, A. Steland. *Regularity of multifractional moving average processes with random Hurst exponent.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. 140, pp. 21-48, (2021).

[PT] G. Pang, M.S. Taqqu. *Nonstationary self-similar processes as scaling limits of power-law shot noise processes and generalizations of fractional Brownian motion.* High Frequency. Vol. 2, Iss. 2, pp. 95-112, (2019).

[ST1] S. Stoev, M.S. Taqqu. *Stochastic properties of the linear multifractional stable motion*. Advances in Applied Probability, Vol. 36, Iss. 4, pp. 1085-1115, (2004).

[ST2] S. Stoev, M.S. Taqqu. *Path properties of the linear multifractional stable motion*. Fractals, Vol. 13, Iss. 02, pp. 157-178, (2005).

[WX1] R. Wang, Y. Xiao. *Exact Uniform Modulus of Continuity and Chung's LIL for the Generalized Fractional Brownian Motion*. Journal of Theoretical Probability, Vol. 35, Iss. 4, 2442-2479, (2022).

[WX2] R. Wang, Y. Xiao. *Lower functions and Chung's LILs of the generalized fractional Brownian motion.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 514, Iss. 2, 126320, (2022).